Richard Streit Hamilton

Richard . L. Hamilton — Ricci 流 (1943年 USA. Ohio).

William ·H· Hamilton — 19世纪
Rowan

Lewis Hamilton — 1985年 (F1赛车手. 世界冠军) 英国人

Richard C. Hamilton — Detroit 活塞队的后卫 1978年

Fourier Analysis.

φ 定义在 $(-l, l)$ 上.

$$\varphi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{l} + B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

易得: $\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = 0 \quad (m \neq n)$

HW: 证明 $\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = 0 \quad (\forall n, m)$.

$$A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \quad B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

收敛性.

① $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$

② $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $L^2([a,b])$ 意义下收敛到 $f(x)$, 若 $\left(\int_a^b \left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \ (n\to\infty)$

定理1: 若 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$

定理2: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 C^{α}-连续的 $(\alpha>0)$, 则定理1结论成立.

定理3: 若 $f \in L^2[a,b]$, 则 $f(x)$ 的 fourier 级数在 L^2 意义下收敛到 $f(x)$.

$f(0)=f(l)=0 \Rightarrow f$ 可周期延拓到 $\mathbb{R}$, $[-l, l] \to [a-l, a+l]$

$\cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}$ 可用 $e^{i\frac{n\pi x}{l}}, e^{-i\frac{n\pi x}{l}}$ 等价表示 $\Rightarrow$ 可用 $e^{i\frac{n\pi x}{l}}, n=0,\pm1,\pm2,\dots,$ 作为基底

$\varphi(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{in\frac{\pi x}{l}}$, $C_n \in \mathbb{C}$. 令 $X_n = e^{in\frac{\pi x}{l}}$, $(X_n, X_m) = \int_{-l}^{l} X_n(x)\overline{X_m(x)}\,dx$

$m \neq n$. $(X_m, X_n) = \int_{-l}^{l} e^{i\frac{m\pi x}{l}} \cdot e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx = \int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + i\sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{l}\right)\right)dx = 0$

$(X_m, X_m) = \int_{-l}^{l} 1\,dx = 2l$

$(\varphi(x), X_m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(C_n X_n, X_m) = C_m(X_m, X_m) = C_m 2l$

$\Rightarrow C_m = \frac{1}{2l}\cdot\int_{-l}^{l}\varphi(x)\,e^{-\frac{im\pi x}{l}}dx$

设 $\{X_n\}$ 为形如上述的Fourier基底, 且 $f \in L^2([a,b])$. 设 N 是固定正整数, 如何选取 N 个常数 $C_1, C_2, \dots, C_N \in \mathbb{R}$ s.t. $\|f(x) - \sum_{n=1}^{N} C_n X_n\|_{L^2}$ 取最小值 (这里假设 X_n 为实函数)

证: 设 $E_N := \|f - \sum_{n=1}^{N} C_n X_n\|_{L^2}^2 = \int_a^b \left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} C_n X_n\right|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - 2\sum_{n=1}^{N} C_n \int_a^b f(x)X_n(x)\,dx + \sum_{n=1}^{N} C_n^2\|X_n(x)\|^2$

$$= \sum_{n=1}^{N}\|X_n\|^2\left(C_n^2 - \frac{2(f, X_n)}{\|X_n\|^2}C_n + \frac{(f,X_n)^2}{\|X_n\|^4}\right) - \sum_{n=1}^{N}\frac{(f,X_n)^2}{\|X_n\|^2} + \|f\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\|X_n\|^2\left(C_n - \frac{(f,X_n)}{\|X_n\|^2}\right)^2 + \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N}\frac{(f,X_n)^2}{\|X_n\|^2}$$

故 $c_n=\frac{(f,X_n)}{\|X_n\|^2}$ 可使E_n达到最小，此即 f 的 Fourier 展开前N项系数. □

此时 $\min E_n=\|f\|^2-\sum_{n=1}^{N}\frac{(f,X_n)^2}{\|X_n\|^2}\ge 0$.   Bessel 不等式

$$\Rightarrow \|f\|^2\ge\sum_{n=1}^{N}\frac{(f,X_n)^2}{\|X_n\|^2}$$ 设 Fourier系数 $A_n=\frac{(f,X_n)}{\|X_n\|^2}$

故 $\|f\|^2\ge\sum_{n=1}^{N}A_n^2\|X_n\|^2$，故 $\|f\|^2$有限 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}A_n\|X_n\|^2$收敛

当 $\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n$ 在 L^2 意义下收敛到 f 时，$\lim_{N\to\infty}E_N=0$，也即 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2\|X_n\|^2=\|f\|^2$ (Parseval 等式).

定理：$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$，若 1) $f\in C^1[a,b]$
2) f 满足一定的边界条件.

设 $f\in C^1[a,b]=C^1[-\pi,\pi]$，$\{X_n\}=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$.

则 $f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$，$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\cos nx\,dx$，$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$f'(x)\sim\frac12A_0'+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n'\cos nx+B_n'\sin nx)$ 易证 $A_n'=nB_n$，$B_n'=-nA_n$，$A_0'=0$ ——— HW

由 $f'\in C[a,b]\Rightarrow f'\in L^2([a,b])$，由上述不等式的推导

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2\|X_n\|^2\le\|f\|^2,\quad \|X_n\|^2=\pi$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\pi(|A_n'|^2+|B_n'|^2)\le\|f'\|^2<+\infty$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n'|^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|B_n'|^2$ 都收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|+|B_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n(|A_n'|+|B_n'|)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac12\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n'|^2+|B_n'|^2)<+\infty$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n|A_n'|\le\frac12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac1{n^2}+|A_n'|^2\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac1n|B_n'|\le\frac12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac1{n^2}+|B_n'|^2\right)\right)$$

故级数 $\frac12A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$ 绝对一致收敛 [是否收敛到 f 还有待进一步研究]

记 $S_N(x)=\frac12A_0+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy+\frac1\pi\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}(f(y)\cos ny\cos nx+f(y)\sin ny\sin nx)\,dy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy+\frac1\pi\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos(n(y-x))\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\Big(1+2\sum_{n=1}^{N}\cos n(y-x)\Big)dy:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)K_N(y-x)\,dy$$ ($K_N(\theta)=1+2\sum_{i=1}^{N}\cos i\theta$ 为 Dirichlet 核)

容易证明 $\int_{-\pi}^{\pi}K_N(x)\frac{dx}{2\pi}=1$

故 $f(x)-K_N(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)K_N(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f(y)K_N(y-x)\frac{dy}{2\pi}$

对后一项 $\int_{-\pi}^{\pi}f(y)K_N(y-x)\frac{dy}{2\pi}\xlongequal{y-x=\theta}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(\theta+x)K_N(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}\xlongequal[\text{具有同期性}]{f(-\pi)=f(\pi),\ K_N(\theta)}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+x)K_N(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$

故 $f(x)-S_N(x)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\theta)-f(x)]K_N(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$

$K_N(\theta)=1+2\sum_{n=1}^{N}\cos n\theta=\frac{\sin(N+\frac12)\theta}{\sin\frac\theta2}$ ——— 10.4 HW

$f(x)-S_N(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta+x)-f(x))\frac{\sin(N+\frac12)\theta}{\sin\frac\theta2}\frac{d\theta}{2\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+\theta)-f(x)}{\sin\frac\theta2}\sin(N+\frac12)\theta\frac{d\theta}{2\pi}:=\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)\sin(N+\frac12)\theta\frac{d\theta}{2\pi}$

$\phi_N(\theta)=\sin(N+\frac12)\theta$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是正交的(权为 $\frac{1}{2\pi}$) ——— 10.4 HW

$f(x)-S_N(x)$ 可表示为 (g,ϕ_N) $\|\phi_N(\theta)\|^2_{L^2}=\pi$ -- HW

已证明结论：若 $g\in L^2([-\pi,\pi])$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(g,\phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2}<\|g\|^2<\infty$

$\because\|\phi_n\|^2\equiv\pi$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}|(g,\phi_n)|^2<\infty\Rightarrow(g,\phi_N)\to0$. $\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin(N+\frac12)x\,dx=0$ (Riemann 引理)

故为证明 $f(x)-S_N(x)\to 0$. 只需证 $g(\theta)\in L^2[-\pi,\pi]$, $g=\dfrac{f(x+\theta)-f(x)}{\sin\frac{1}{2}\theta}$, 在 $\theta\neq 0$ 处 g 连续, 只需证明 g 在 $\theta=0$ 处连续即可

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(x+\theta)-f(x)}{\sin\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{f(x+\theta)-f(x)}{\theta}\cdot\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=2f'(x)$$ 得证. 故 $S_N(x)\to f$ 且此过程是一致的.

Hölder 空间

$[f]_\alpha:=\sup\limits_{x,y}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty$ (也即 $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|^\alpha$) 称为指数 α 的 Hölder 条件.

1) $\alpha>0$ 时, f 为一致连续

2) $\alpha>1$ 时, $f\equiv C$.

令 f 是 S^1 上的连续函数 (周期连续)

令 $\hat{f}(n)$ 为 f 的 fourier 系数. 也即 $\hat{f}(n)=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx$

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\cdot e^{2\pi inx}dx$$

卷积: 设 $f,g\in C(S^1)$

$(f*g)(x)=\int_0^1 f(x-y)\cdot g(y)dy$ ——— 证明 $(f*g)\in C(S^1)$ HW

引理: f,g 如上, 则

$$\widehat{(f*g)}(n)=\hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)$$

证明:
$$\widehat{f*g}(n)=\int_0^1 (f*g)e^{-2\pi inx}dx=\int_0^1 e^{-2\pi inx}\int_0^1 f(x-y)g(y)dy\,dx$$
$$=\int_0^1 e^{-2\pi in(x-y)}\int_0^1 f(x-y)e^{-2\pi iny}g(y)dy\,dx$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(x-y)e^{-2\pi in(x-y)}dx\cdot g(y)e^{-2\pi iny}dy$$
$$\underset{f\text{的周期性}}{=}\int_0^1\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx\cdot g(y)e^{-2\pi iny}dy=\hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)\quad\square$$

故:
$$S_N(x)=\sum_{|n|\le N}\hat{f}(n)\cdot e^{2\pi inx}=\sum_{|n|\le N}\int_0^1 f(y)e^{-2\pi iny}dy\cdot e^{2\pi inx}=\sum_{|n|\le N}\int_0^1 f(y)e^{2\pi in(y-x)}dy:=(D_N*f)(x)$$
$$\int_0^1 f(y)\sum_{|n|\le N}e^{2\pi in(x-y)}dy$$

$$D_N(x):=\sum_{|n|\le N}e^{2\pi inx}=1+\sum_{n=1}^N(e^{2\pi inx}+e^{-2\pi inx})=1+2\sum_{n=1}^N\cos(2\pi nx)$$

HW: $D_N(x)=\dfrac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin\pi x}$

定理: 设 $f\in C^\alpha(S^1)$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty}(D_N*f)(x)=f(x)$ 且为 uniformly.

HW: 若 $f\in C^1[a,b]$, 则 f 为 $C^\alpha[a,b]$, $\forall\alpha\in(0,1)$

Calabi 在宾州大学任教. 是 Fubini 给他写的推荐信

HW: $\int_0^1 D_N(x)dx=1$

证明: 考虑
$$(D_N*f)(x)-f(x)=S_N(x)-f(x)=\int_0^1 D_N(x-y)f(y)dy-\int_0^1 D_N(y)\cdot f(x)dy$$
$$=\int_0^1 D_N(y)f(x-y)dy-\int_0^1 D_N(y)f(x)dy$$
$$=\int_0^1 D_N(y)\cdot(f(x-y)-f(x))dy$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}D_N(y)\cdot(f(x-y)-f(x))dy=\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}D_N(y)\cdot(f(x-y)-f(x))dy}_{A}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}\ge|y|\ge\delta}D_N(y)\cdot(f(x-y)-f(x))dy}_{B}$$

$$\boxed{D_N(x)=\frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin\pi x}}$$

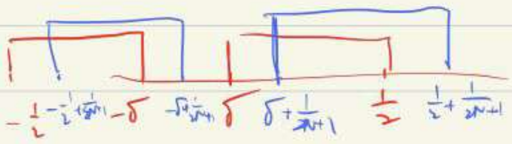
由 $f\in C^\alpha(S^1)$, 在 A 中, $|f(x-y)-f(x)|\le C\cdot|y|^\alpha$

$$\text{而}\ |D_N(y)|\le\frac{C}{|y|}\Rightarrow|A|\le\int_{-\delta}^{\delta}\frac{C}{|y|}C\cdot|y|^\alpha dy\le 2\int_0^\delta C_1\cdot y^{\alpha-1}dy=2\frac{C_1}{\alpha}y^\alpha\Big|_0^\delta=\frac{2C_1}{\alpha}\cdot\delta^\alpha$$

再设 $h(y)=\dfrac{f(x-y)-f(x)}{\sin\pi y}$, $B=\int_{|y|\in[\delta,\frac{1}{2}]}h(y)\cdot\sin(2N+1)\pi y\,dy=-\int_{\frac{1}{2}\ge|y|\ge\delta}h(y)\cdot\sin\left((2N+1)\pi(y+\frac{1}{2N+1})\right)dy$

$$\overset{y+\frac{1}{2N+1}=z}{=} -\int_{\frac12\ge|z-\frac{1}{2N+1}|\ge\delta} h\left(z-\tfrac{1}{2N+1}\right)\sin((2N+1)\pi z)\,dz$$

$$= -\int_{\frac12\ge|z|\ge\delta}\sim dz + \int_{[\delta,\delta+\frac{1}{2N+1}]} - \int_{[\frac12,\frac12+\frac{1}{2N+1}]} + \int_{[-\frac12,-\frac12+\frac{1}{2N+1}]} - \int_{[-\delta,-\delta+\frac{1}{2N+1}]}$$



相差一个周期 抵消

$$= -\int_{\frac12\ge|z|\ge\delta} h\left(z-\tfrac{1}{2N+1}\right)\sin(2N+1)\pi z\,dz + \left(\int_{\delta}^{\delta+\frac{1}{2N+1}} + \int_{-\delta}^{-\delta+\frac{1}{2N+1}}\right) h\left(z-\tfrac{1}{2N+1}\right)\sin(2N+1)\pi z\,dz$$

将B的初始形态与终态相加

$$2B = \int_{\delta\le|z|\le\frac12}\left(h(z)-h\left(z-\tfrac{1}{2N+1}\right)\right)\sin(2N+1)\pi z\,dz + \int_{\delta}^{\delta+\frac{1}{2N+1}} + \int_{-\delta}^{-\delta+\frac{1}{2N+1}} h\left(z-\tfrac{1}{2N+1}\right)\sin(2N+1)\pi z\,dz$$

$$h(y)-h(z) = \frac{f(x-y)-f(x)}{\sin\pi y} - \frac{f(x-z)-f(x)}{\sin\pi z} \qquad (f(x-z)-f(x))\left(\frac{\sin\pi z-\sin\pi y}{\sin\pi y\,\sin\pi z}\right)$$

Hölder条件

$$= \frac{f(x-y)-f(x-z)}{\sin\pi y} + \underbrace{\frac{f(x-z)-f(x)}{\sin\pi y} - \frac{f(x-z)-f(x)}{\sin\pi z}}$$

$|y|\ge\delta$

取 $\delta \gg \frac{1}{N}$

则 $|h(y)-h(z)| \le C\delta^{-1}[f]_\alpha|y-z|^\alpha + C\|f\|_{L^\infty}\delta^{-2}|y-z|$ $\qquad [f]_\alpha = \sup_{y,z}\frac{|f(y)-f(z)|}{|y-z|^\alpha}$

$|y-z| = \frac{1}{2N+1}$ 故 $|h(y)-h(z)| \le C\cdot\delta^{-1}N^{-\alpha} + C\cdot\delta^{-2}N^{-1}$

对于剩余两项: $\left|h\left(z-\frac{1}{2N+1}\right)\right| \le C\|f\|_{L^\infty}\cdot\delta^{-1}$

$\Rightarrow \int_{\delta}^{\delta+\frac{1}{2N+1}} h\left(z-\frac{1}{2N+1}\right)\sin(2N+1)\pi z\,dz \le C\|u\|_{L^\infty}\delta^{-1}N^{-1}$, 另一项类似.

综合以上估计, $|A+B| \le C_1\delta^\alpha + C_2\delta^{-1}N^{-\alpha} + C_3\delta^{-2}N^{-1} + C_4\delta^{-1}N^{-1}$, $C_i\ (i=1,2,3,4)$ 均是与α, f有关的常数.

取 $\delta = N^{-\frac{\alpha}{3}}$, $|A+B| \le C_1N^{-\frac{\alpha^2}{3}} + C_2N^{-\frac{2}{3}\alpha} + C_3N^{-1+\frac{2}{3}\alpha} + C_4N^{-1+\frac{1}{3}\alpha}$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取足够大的N即可使 $|S_Nf-f|<\varepsilon$ 且与x无关. 与N, δ无关

故 $S_N(x)\rightrightarrows f$

定理3: 若 $f\in L^2[a,b]$, 设 γ_n 为 $[a,b]$ 上的标准正交基, 也即: $\int_a^b \gamma_n(x)\gamma_m(x)\,dx = \delta_{mn}$,

则 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n,f)\cdot\gamma_n = f$ (L^2 意义下, 也即

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=1}^{N}(f,\gamma_n)\gamma_n\right\|_{L^2}=0\ )$$

考虑 $f\in C^1[a,b]$ (或 C^α), 则由定理1.2知 结论必成立 (一致收敛更强).

引理: 若 $f\in L^2[a,b]$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\tilde f\in C^1[a,b]$. s.t. $\|f-\tilde f\|_{L^2}<\varepsilon$

对定理3进行证明, $f\in L^2[a,b]$, $\exists\tilde f\in C^1[a,b]$, s.t. $\|f-\tilde f\|_{L^2}<\varepsilon$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$. s.t. $N\ge N_0$ 时,

有 $\left\|\tilde f-\sum_{n=1}^{N}(\tilde f,\gamma_n)\gamma_n\right\|_{L^2}<\varepsilon$

$$\left\|f-\sum_{n=1}^{N}(f,\gamma_n)\gamma_n\right\|_{L^2} \le \underbrace{\|f-\tilde f\|_{L^2}}_{\varepsilon\text{ 确定 }\tilde f} + \underbrace{\left\|\tilde f-\sum_{n=1}^{N}(\tilde f,\gamma_n)\gamma_n\right\|_{L^2}}_{\tilde f\text{ 确定 }N_1} + \underbrace{\left\|\sum_{n=1}^{N}(\tilde f-f,\gamma_n)\cdot\gamma_n\right\|_{L^2}}_{\le\|\tilde f-f\|_{L^2}^2\ (\forall N)}$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}(\tilde f-f,\gamma_n)\gamma_n\right\|_{L^2} = \int_a^b\left|\sum_{n=1}^{N}(\tilde f-f,\gamma_n)\gamma_n\right|^2dx = \int_a^b\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}(\tilde f-f,\gamma_m)(\tilde f-f,\gamma_n)\gamma_m\gamma_n\,dx$$

$$= \int_a^b\sum_{n=1}^{N}(\tilde f-f,\gamma_n)^2\gamma_n^2\,dx = \sum_{n=1}^{N}(\tilde f-f,\gamma_n)^2\cdot 1$$

由引理 (Bessel不等式) $\sum_{n=1}^{N}(\tilde f-f,\gamma_n)^2 \le \|\tilde f-f\|_{L^2}^2$, 从而对上面三项均有一个估计

$$\left\|f-\sum_{n=1}^{N}(f,\gamma_n)\gamma_n\right\|_{L^2}<\varepsilon \qquad \square$$