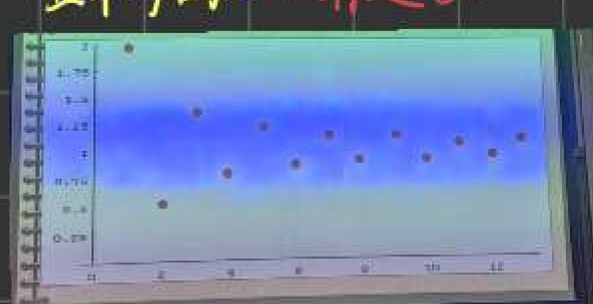
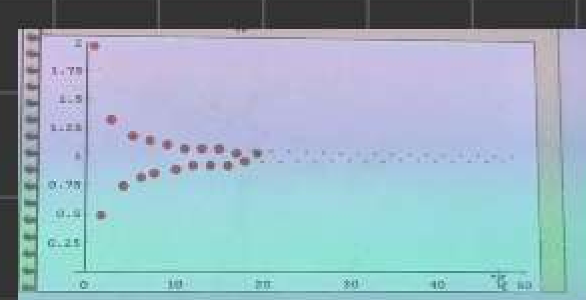
第二章 数列极限

1. 数列 $\{a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots\cdots\}$ 有序
   集合 $\{a_1, a_3, a_4, a_2 \cdots\cdots\}$ 无序

2. 收敛数列：设 $\{a_n\}$ 为数列，对于 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N \in N^+$ st 当 $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$ 则
   称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a。a 称为 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

   ① ε 具有任意性，一般 $0<\varepsilon<1$（$K\varepsilon$，$\frac{1}{2}\varepsilon$ 都与 ε 等价）
   ② N 具有存在性，依赖于 ε 但不是函数关系
   ③ $\{a_n\}$ 只有有限项位于 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 外 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 表示的是数列整体的性质（一种趋势）

虽然在上下波动但是函数整体趋势向1靠近

替代定义：任给 $\varepsilon>0$，若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限项

$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a$（有限）

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists N$ 当 $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \neq a$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$ $\forall N$ 当 $n>N$ 时 $|a_n-a| \geq \varepsilon_0$

特别地 $N=1$ $\exists n_1>1$，$|a_{n_1}-a| \geq \varepsilon_0$

$N=\max\{2, n_1\}$ $\exists n_2>N$ $|a_{n_2}-a| \geq \varepsilon_0$

$\vdots$

$N=\max\{k, n_{k-1}\}$ $\exists n_k>N$ $|a_{n_k}-a| \geq \varepsilon_0$

则得到 $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ $|a_{n_k}-a| \geq \varepsilon_0$

即在 $U(a;\varepsilon)$ 外有无限项

3. 补充：贝努里不等式：当 $h>-1$ 时 $(1+h)^n \geq nh$

证明：$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$(1+h)^n-1 = h\cdot[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots\cdots+(1+h)^{n-1}]$

① 当 $h>0$ 时 $1+h>1$

$(1+h)^n-1 > nh$

$\therefore (1+h)^n \geq nh$

② 当 $-1<h<0$ 时 $0<1+h<1$

$[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots(1+h)^{n-1}]<n$

$h[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots(1+h)^{n-1}]>nh$

$\therefore (1+h)^n-1>nh$

$(1+h)^n \geq nh$.

☆如何利用定义来证明极限

eg. 用定义验证 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-n-7} = \frac{1}{3}$

证明：$\forall \varepsilon>0$ 解不等式 $\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$

$\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3} = \frac{n+7}{3(3n^2-n-7)}$

当 $n\geq 7$ 时 $n+7 \leq 2n$ $3n^2-n-7 \geq 3n^2-2n \geq 2n^2$

要使 $\left|\frac{n+7}{3|3n^2-n-7|}\right| \leq \frac{2n}{6n^2} = \frac{1}{3n}<\varepsilon$

只要 $n>\frac{1}{3\varepsilon}$ 即可

取 $N=\max\{[\frac{1}{3\varepsilon}]+1, 7\}$

当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$

由定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-n-7}=\frac{1}{3}$

经典例题

eg. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$

① 若 $a>1$ 则 $\sqrt[n]{a}>1$ 令 $h_n=\sqrt[n]{a}-1>0$

$a=(h_n+1)^n=1+nh_n+C_n^2h_n^2+\cdots+C_n^nh_n^n \geq 1+nh_n$

$\Rightarrow h_n \leq \frac{a-1}{n}$

$\forall \varepsilon>0$ 要使得 $h_n<\varepsilon$，只要 $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$

取 $N=[\frac{a-1}{\varepsilon}]+1$

当 $n>N$ 时 $0<\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$ 成立

由定义 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$

② 若 $0<a<1$ 令 $a=\frac{1}{b}$ $b>1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}} = 1$

③ 当 $a=1$ 时 显然成立

综上所述 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$ 恒成立

eg. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$

法1：令 $h_n=\sqrt[n]{n}-1$ 则 $h_n>0$

$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots\cdots+h_n^n>1+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$

当 $n>2$ 时 $h_n<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}}$

对于 $\forall \varepsilon>0$ 要使 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 只要 $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 即 $n>(\frac{2}{\varepsilon})^2$

取 $N=[(\frac{2}{\varepsilon})^2]+1$ 则当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

由定义得，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$

法2：$(1+\frac{1}{n})^n<e<n$

$\Rightarrow (n+1)^n<n^{n+1}$

$\Rightarrow \sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$

$\Rightarrow \{\sqrt[n]{n}\}\downarrow$ $\sqrt[n]{n}>1$

$b^{n+1}-a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a)$ $b>a$

可知 $\lim \sqrt[n]{n}$ 存在 记为 $a \geq 1$

$(1+h)^n \geq nh.$

$b^{n+1}-a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a) \quad b>a$

由贝努里不等式

$(1+h)^{n+1} > (n+1)h$

令 $h=\frac{b}{a}$

$(1+\frac{b}{a})^{n+1} > (n+1)\frac{b}{a}$

$(a+b)^{n+1} > (n+1)\cdot b\cdot a^n$

令 $b'=a+b \quad a'=a$ 满足 $b'>a'$

$b'^{n+1} > (n+1)\, a'^n (b'-a')$

∴ 不等式成立

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 存在 设为 $a\geq 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}$

$= \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}$

$= \sqrt{1\cdot a}$

$a=\sqrt{a}$ 解得 $a=0$ 或 $a=1$

∴ $a=1$

法2：几何平均≤算术平均.

即 $\forall a_1,a_2,a_3\cdots a_n>0$，有

$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-2个}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} \leq \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} = 1+\frac{2\sqrt{n}-2}{n}$

$< 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$

∴ $0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$

$\forall \varepsilon>0$ 要使 $\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$ 只要 $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$

（略）

对n!的估算：我们可以采用平方的形式 → 这是一种常用的放缩类型

$(n!)^2 = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k\cdots\cdots(n-1)\cdot n$
$\qquad\quad n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)\cdots 2\cdot 1$

$k(n-k+1) \leq (\frac{n-k+1+k}{4})^2 = \frac{(n+1)^2}{4}$

当 $1<k<n$ 时.

$(k-1)(n-k)>0$

$k(n-k)-n+k>0$

$k(n-k+1)>n$

∴ $n<k(n-k+1)<\frac{(n+1)^2}{4}$

$\Rightarrow n^n < n!^2 < [\frac{(n+1)^2}{4}]^n$

$\Rightarrow n^{\frac{n}{2}} < n! < (\frac{n+1}{2})^n$

eg. $a_n=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$

$a_n^2 = (\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\cdots\times\frac{2n-1}{2n})^2$

我们有不等式 $\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$ $(b>a)$

∴ $a_n^2 < \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\ \frac{2n}{2n+1}$

$\Rightarrow a_n^2 < \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n}{2n+1}$

$= \frac{1}{2n+1}$

∴ $a_n < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$

另还有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{c^n}=0$

4. 极限定义'：任给 $\varepsilon>0$，若在 $U(a;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a.

相应地：发散数列为 存在某个 $\varepsilon_0>0$，使得数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项落在 $U(a;\varepsilon_0)$ 之外

例：证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1,\ k\in N$ 为常数)

∵ $a>1$ 设 $b=a-1$ 则 $b>0$

$a^n=(1+b)^n = 1+C_n^1 b+C_n^2 b^2+\cdots C_n^k b^k+C_n^{k+1}b^{k+1}+\cdots\cdots+C_n^n b^n$

$\geq C_n^{k+1}b^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\cdot b^{k+1}$

$0<\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}\ \frac{(k+1)!}{b^{k+1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdots\frac{n}{n-k}\cdot\frac{(k+1)!}{b^{k+1}}$

当 $n>2k$ 时.

$1<\frac{n}{n-1}<2 \quad \cdots\cdots \quad 1<\frac{n}{n-k}<2$

∴ 原式 $< \frac{1}{n}\cdot 2^k\cdot\frac{(k+1)!}{b^{k+1}}$

设 $M=2^k\cdot\frac{(k+1)!}{b^{k+1}}$

∴ $\frac{n^k}{a^n}<\frac{M}{n}<\varepsilon$

$n>\frac{M}{\varepsilon}$

取 $N=\max\{[\frac{M}{\varepsilon}]+1,\ 2k\}$

当 $n>N$ 时 $|\frac{n^k}{a^n}-0|<\varepsilon$

由定义可知

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty \Rightarrow$ $\{a_n\}$ 无界. 反之无法得到.

4. 无穷小量：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 称 $\{a_n\}$ 为 $n\to+\infty$ 时的无穷小量.

（或无穷小数列）

是一个过程 不是一个数.

与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 等价

因为 $a\neq 0$ 时 可以有 $b_n=a_n-a$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

5. 无穷大量：$\lim\limits_{x\to\infty}a_n=\infty$ 则称 $\{a_n\}$ 是一个无穷大数列 或无穷大量

定义：对 $\forall M>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n|>M$ 则称 $\{a_n\}$ 发散于无穷大. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=\infty$ 或 $a_n\to\infty$.

6. 定义：若数列 $\{a_n\}$ 满足：对 $\forall M>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $a_n>M$ ($a_n<-M$) 则称数列 $\{a_n\}$ 发散于正(负)无穷大

记作 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=+\infty\ (-\infty)$ 非正常极限. 不代表极限存在

eg. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

由定义已知 对于 $\forall M$，$\exists N$ st $n>N$ 时 $a_n>M$

则有 $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{M}$

取 $\varepsilon=\frac{1}{M}$

对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ st $n>N$ 时 $\frac{1}{a_n}<\varepsilon$

由定义得

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

7. 实数定理：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$

（a可以取 $\pm\infty$，或某一常数）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}=a$.

→ 证明：由定义对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$ st $n>N_1$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a$

$=\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots(a_{N_1}-a)+(a_{N_1+1}-a)\cdots(a_n-a)}{n}$

设 $(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)=M$

从 N_1+1 项开始 $a_{N_1+1}-a<\varepsilon$

∴ 有 $\frac{M}{n}+\frac{(n-N_1)\varepsilon}{n}<2\varepsilon$

小于 ε 小于 ε

∵ $\frac{M}{n}<\varepsilon$ $n>\frac{M}{\varepsilon}$

取 $N=\max\{[\frac{M}{\varepsilon}]+1,\ N_1\}$

则有 $n>N$ 时 $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a<2\varepsilon$ 成立

可以限定 对于 $\forall\varepsilon\in(0,1)$ 但不可以限定 $\forall\varepsilon\in(1,+\infty)$

ε 要满足任意小，而不是任意大

单调增加数列 单调减小数列.

8. $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 有不等式 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

欧拉公式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+T_n \to \lim\limits_{n\to\infty}T_n=0$

9. 收敛数列的性质：① 唯一性：若 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限.

② 有界性. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 为有界数列. 即存在正数 M 使得对于一切正整数都有 $|a_n| \le M$

有界性只是数列收敛的必要条件，并不是充分条件.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

③ 保号性：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$（或 $a<0$）则对任何 $a' \in (0,a)$ 或 $(a' \in (a,0))$ 存在正数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $a_n > a' > 0$（或 $a_n < a' < 0$）

（由极限值 a 的正号，确保 $\{a_n\}$ 从某一项开始严格大于0）

重点在由极限来确定符号.

在应用保号性时，常取 $a' = \frac{a}{2}$.

推论：设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，$a<b$，则 $\exists N$，s.t. $n>N$ 时有 $a_n < b_n$.

④ 保不等式性：设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为收敛数列. 若存在正数 N_0，使得当 $n>N_0$ 时 有 $a_n \le b_n$ 则 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

tips：若将 $a_n \le b_n$ 改为 $a_n < b_n$ 结论也是 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

⑤ 迫敛性：设收敛数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都以 a 为极限，数列 C 满足：存在正数 N_0，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n \le C_n \le b_n$，则 $\{C_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} C_n = a$.

结论：
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m} & k=m \\ 0 & k>m \end{cases}$$

由最高次项决定

$n\to\infty$ 时，$a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots = a_m n^m$

原因：
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots}{a_m n^m} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \cdot \frac{1}{n} + \cdots\right) = 1$$

⑥ 四则运算法则：
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + C) = \lim_{n\to\infty} a_n + C, \quad \lim_{n\to\infty} C a_n = C \lim_{n\to\infty} a_n.$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

法则只针对于有限次的加减乘除成立

eg. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \ne \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdots\cdots$

tips：使用时要先确保极限存在才能使用.

证明：设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$

对于 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1$ st $n > N_1$ 时，

$|a_n - a| < \varepsilon$ 和 $|b_n - b| < \varepsilon$ 都成立.

由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ 可知 b_n 有界.

$\exists M>0$ st 对于 $\forall \{b_n\}$ 有 $b_n < M$

$|a_n \cdot b_n - ab|$

$= |a_n b_n - ab + ab_n - ab_n|$

$= |b_n||a_n - a| + a|b_n - b|$

$\le M\varepsilon + a\varepsilon = (M+a)\varepsilon$ → 一个常数

∴ 由定义可得

$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} b$.

10. 子列定义：设 $\{a_n\}$ 为数列，$\{n_k\}$ 为正整数集 N_+ 的无限子集，且 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 则数列 $a_{n_1}, a_{n_2} \cdots a_{n_k} \cdots$ 称为 $\{a_n\}$ 的一个子列，记作 $\{a_{n_k}\}$.

$\{a_{n_k}\}$ 中第 k 项是 $\{a_n\}$ 中第 n_k 项，所以有 $n_k \ge k$.

定理：数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\{a_n\}$ 的任何子列都收敛.

11. 相关定义：若数列 $\{a_n\}$ 的各项满足关系式 $a_n \le a_{n+1}$ $(a_n \ge a_{n+1})$，则称 $\{a_n\}$ 为递增数列（递减数列），递增、递减数列统称为单调数列.

12. 相关定理：① (单调有界定理) 在实数系中，有界的单调数列必有极限.

{ 有上界的递增数列
  有下界的递减数列

② (致密性定理) 任何有界数列都必有收敛的子列.

③. (柯西收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n, m > N$ 时，有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Cauchy 收敛准则充分性证明.

证明：$\{a_n\}$ 是 Cauchy 列，则 $\{a_n\}$ 一定有界

特别地，取 $\varepsilon = 1$ $\exists N_1$，当 $n > N_1$ 时 $|a_n - a_{N_1+1}| < 1$

$|a_n| \le |a_{N_1+1}| + 1$

取 $M = \max\{|a_1|, |a_2| \cdots\cdots |a_{N_1+1}|+1\}$

∴ 对于 $\forall \{a_n\}$ 有 $|a_n| < M$

由任何数列都存在单调子列可知，Cauchy 一定存在一个单调子列 $\{a_{n_k}\}$ 又由于 Cauchy 列一定有界，

∴ $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$（$a$ 有限）

由定义对于 $\forall \varepsilon>0$ $\exists K$ st $k>K$ 时 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$

取 $N' = \max\{N_1, n_K\}$

当 $n > N'$ 且 $k > K$ 时

$|a_n - a| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$

∴ $\{a_n\}$ 收敛

13. $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 证明其有界. 规定 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$e_n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= 1 + \frac{n}{1!} \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots 1}{n!} \frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

附加考点
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \frac{1}{n!}$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= 1 + 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$2 \le e_n < 3$

∴ e_n 有界.

$e_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})+\cdots\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$

$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$

$\therefore$ 有 $e_n<e_{n+1}$ e_n 单调递增.

14. 证明: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e$. 设 $S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}$

证明: 易证 $1+\frac{1}{1!}+\cdots\frac{1}{n!}$ 是递增数列.

原式 $<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}$

$=1+1\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$

$=3-(\frac{1}{2})^n<3$

$\therefore$ 数列有界. $\therefore$ 极限存在.

由保不等式性

$\lim_{n\to\infty}e_n=e\le\lim_{n\to\infty}S_n$.

对于 $\forall m<n$

$e_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$

$>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$

便不等式两边 $n\to\infty$ 得

$e=\lim_{n\to\infty}e_n\ge1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{m!}=S_m$

由极限的保不等号性

$\lim_{m\to\infty}S_m\le\lim_{n\to\infty}e_n=e$.

从而有 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!})$ → 可以通过这个式子快速得到 e 的近似值

其误差: $S_{n+m}-S_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}$

$=\frac{1}{n!}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)})$

$<\frac{1}{n!}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\frac{1}{(n+1)^m})$

$=\frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-(\frac{1}{n+1})^m}{1-\frac{1}{n+1}}$

$=\frac{1}{n!}\frac{1}{n}[1-(\frac{1}{n+1})^m]$

当 $m\to\infty$ 时

$S_{n+m}-S_n<\frac{1}{n!n}$

eg. 设 $a_n\ge0$ $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

由保不等式性. $a\ge0$

由定义. 对于 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ st $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$

① 当 $a=0$ 时.

$|a_n-0|=|a_n|<\varepsilon$ $\therefore|\sqrt{a_n}-\sqrt{0}|=|\sqrt{a_n}|<\sqrt{\varepsilon}$

② 当 $a>0$ 时

$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=|\frac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}|\le|\frac{a_n-a}{\sqrt{a}}|\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}$.

$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

☆ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_n^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$

记 $M=\max\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$.

$M^n<a_1^n+a_2^n+\cdots a_n^n<n\cdot M^n$

$M<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_n^n}<\sqrt[n]{n}\cdot M$

$\lim_{n\to\infty}M=M$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot M=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}M=M$

由迫敛性.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots a_n^n}=M$.

15、证明: 任何数列都有单调子列.

我们定义一个性质M为: $a_n=\max\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$

1° 若 $\{a_n\}$ 中有无穷多项具有性质M, 不妨记为 a_{n_k}

$a_{n_k}=\max\{a_{n_k},a_{n_{k+1}}\cdots\}$

则有 $a_{n_1}\ge a_{n_2}\ge a_{n_3}\cdots$ 单调递减子列.

2°. 若 $\{a_n\}$ 中有有限多项具有性质M. 记为N项

取 $n_1>N$, 由于 a_{n_1} 不是 $a_{n_1},a_{n_1+1}\cdots$ 中最大的项 则 $\exists n_2>n_1$ 使 $a_{n_2}>a_{n_1}$

同时 a_{n_2} 不是 $\cdots$

$\therefore a_{n_1}<a_{n_2}<\cdots$ 单调递增数列.

eg. $x_n=\frac{\sin1}{2^1}+\frac{\sin2}{2^2}+\cdots\frac{\sin n}{2^n}$. $n=1,2,\cdots$ 求证 $\{x_n\}$ 收敛

证明: $\forall\ 0<\varepsilon<1$. 不妨设 $n>m$. 由于

$|x_n-x_m|=|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\cdots\frac{\sin n}{2^n}|$

$\le\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots\frac{1}{2^n}$

$=\frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-m}}{1-\frac{1}{2}}$

$<\frac{1}{2^m}$

解不等式 $\frac{1}{2^m}<\varepsilon$ 得 $m>\frac{\ln\varepsilon}{-\ln2}$ 需要正值 $m>$ 负值 无意义

取 $N=[\frac{\ln\varepsilon}{-\ln2}]+1$, 则 $n>N$ 时

有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$ 成立

$\therefore\{x_n\}$ 收敛

16. $\lim_{n\to\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$ 时. 对 $\forall p\in N$. 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0.\ \exists N$, 当 $n,m>N$ 时, 有 $|a_m-a_n|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}a_n$ 发散 $\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0.\ \forall N.\ \exists n_0>N.\ \exists p_0\in N$ st $|a_{n+p}-a_n|>\varepsilon$

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0.\ \forall N.\ \exists m,n>N$ 时 有 $|a_m-a_n|>\varepsilon_0$

17、数列补充题 (课本 P38. T12)

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 记

$\overline{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$ $\underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$

证明: (1) 对任何正整数 n, $\overline{a}_n\ge\underline{a}_n$

(2) $\{\overline{a}_n\}$ 为递减有界数列, $\{\underline{a}_n\}$ 为递增有界数列, 且对任何

正整数 n,m. 有 $\overline{a}_n\ge\underline{a}_m$.

证明: (1) 对任何正整

(2) $\{\bar{a}_n\}$为递

正整数 n, m. 有 $\bar{a}_n \geq \underline{a}_m$.

(3) 设 $\bar{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别是 $\{\bar{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 的极限. 则 $\bar{a} \geq \underline{a}$

(4) $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\bar{a} = \underline{a}$.

(1) 证明: ∵ $\{a_n\}$ 有界 由确界原理 对 $\forall n \in N$, $\bar{a}$ 与 $\underline{a}_n$ 均存在, 且 $\underline{a}_n \leq \bar{a}_n$

(2). ∵ $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} \subset \{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$

∴ $\bar{a}_{n+1} \leq \bar{a}_n$, $\underline{a}_{n+1} \geq \underline{a}_n$

对 $\forall m, n \in N$, 若 $m > n$. 则有.

$\underline{a}_m \leq \bar{a}_m \leq \bar{a}_n$

若 $m < n$. 则有

$\underline{a}_m \leq \underline{a}_n \leq \bar{a}_n$

综上所述, 总有

$\underline{a}_m \leq \bar{a}_n$

(3). 由于

$\underline{a}_1 < \cdots \underline{a}_n < \underline{a}_{n+1} < \cdots < \bar{a}_{n+1} < \bar{a}_n < \bar{a}_1$

$\{\underline{a}_n\}\uparrow$ $\{\bar{a}_n\}\downarrow$ 故由单调有界原理

$\lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n$ 均存在. 即 $\bar{a}$, $\underline{a}$ 存在

又因为 $\underline{a}_m \leq \bar{a}_n$ $\forall n, m \in N$

∴ 由保号性可知. $\underline{a} \leq \bar{a}$

(4). ⇒ (必要性)

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 (不妨记为 a) 可知.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$

即 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ $(\forall n > N)$

⇒. $a - \varepsilon \leq \bar{a}_n < a + \varepsilon$

$a - \varepsilon \leq \underline{a}_n \leq a + \varepsilon$

⇒. $|\bar{a}_n - a| < \varepsilon$ $|\underline{a}_n - a| < \varepsilon$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n = a$

即 $\bar{a} = \underline{a} = a$

⇐ (充分性)

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \bar{a}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{a}_n = \underline{a}$

以及 $\{\bar{a}_n\}\downarrow$ $\{\underline{a}_n\}\uparrow$ 可知.

对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时.

$0 \leq \bar{a}_n - \bar{a} < \varepsilon$ $0 \leq \underline{a} - \underline{a}_n < \varepsilon$

又因 $a_n \leq \bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1} \cdots\}$

$a_n \geq \underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1} \cdots\}$

∴ $\underline{a} - \varepsilon < \underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n < \bar{a} + \varepsilon$.

∴ $a - \varepsilon \leq a_n \leq \bar{a} + \varepsilon$

由题设 $\underline{a} = \bar{a}$ 记为 a

$|a_n - a| < \varepsilon$

由定义 $\{a_n\}$ 收敛.

18. 复习思考题: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$. $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$. 这时是否有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$?

由 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$. 可知.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |u - u_0| < \delta$ 时 $|f(u) - A| < \varepsilon$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$. 则上述 $\delta > 0$

$\exists \delta'$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta'$ 时, 有

$0 < |g(x) - u_0| < \delta'$

若 $g(x)$ 恒等于 u 则不成立

加条件 $g(x)$ 在 $U^\circ(x_0)$ 内 $\neq u_0$

☆ 某点处极限中 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 "$0<$" 不能忽略.

注：白色为正常知识点记录

红色为关键点提醒

蓝色为相关例题补充

黄色为思路理解点拨